Рассмотрим два асимптотических метода – ВКБ (Венцеля, Крамерса, Брюллиэна) и Крылова-Боголюбова.

95. В чем состоит метод ВКБ?

С ним вы хорошо знакомы из квантов (см. «Кванты12. Квазиклассическое приближение»). Бог пишет уравнение

$$\mu^2 y'' + Q^2(x) y = 0, \quad a < x < b$$

Оно вам знакомо по виду

$\Psi(x)+k^2(x)\frac{d^2\Psi}{dx^2}=0$ (только здесь параметр μ зашит в k(x) – там содержится параметр «энергия»).

Так как мы на ОММ, а не на квантовой теории, ответим так, как пишет в своей презентации Боголюбов:

Мы делаем потрясающие замены

$$y = \frac{\phi}{\sqrt{Q}}, \quad t = \frac{1}{\mu}\int_a^x Q(\xi)d\xi$$

И получаем ДУ

$$\phi''_{tt} + \phi - \mu^2 P\phi = 0, \text{ где } P = \frac{Q''}{2Q^3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{(Q')^2}{Q^4}.$$

Это ДУ лучше предыдущего, потому что параметр μ в него входит регулярным образом, а не сингулярным. При μ=0 получаем нулевое приближение:

$$\bar{\phi}''_{tt} + \bar{\phi} = 0, \ \bar{\phi} = A\sin t + B\cos t$$

Ну а затем получаем первое φ=нулевое приближение+параметр $\mu*\varphi_1(t)$.
Итоговое решение

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}\left\{\begin{array}{l} A\sin\left(\frac{1}{\mu}\int\limits_a^x Q(\xi)d\xi\right)+ \\ \qquad +B\cos\left(\frac{1}{\mu}\int\limits_a^x Q(\xi)d\xi\right)+\underline{\underline{O}}(\mu)\end{array}\right\}$$

Замечание. Для уравнения

$$\mu^2 y''-Q^2(x)y=0,\quad a<x<b,$$

аналогично получаем:

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}\left\{Ae^{\frac{1}{\mu}\int\limits_a^x Q(\xi)d\xi}+Be^{-\frac{1}{\mu}\int\limits_a^x Q(\xi)d\xi}+\underline{\underline{O}}(\mu)\right\}.$$

у вас уже было на квантовой теории.

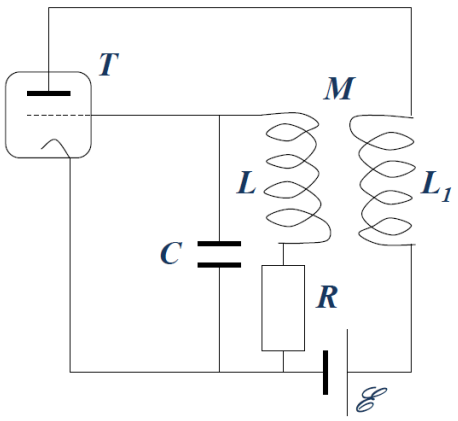
И вот мы добрались до метода Крылова-Боголюбова, про который Александр Николаевич сказал, что это «трудный метод». А как мы знаем,

Что говорит Боголюбов	Что думает студент
Данный метод несложен	Надо будет думать
Это трудный метод	Данный метод поймёт 1,5 человека с потока

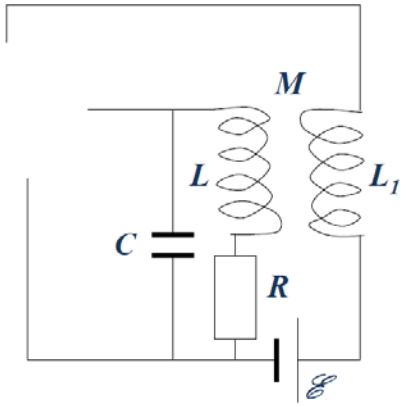
Поэтому сначала кулстори от Боголюбова:
«Я сам долгое время считал, что он назван в честь Александра Николаевича Крылова, контрадмирала, академика корабельной науки, который много занимался численной математикой. А оказалось (с расстройством), это всего лишь мой двоюродный брат, который в песочнице мне куличики разбивал» (ладно, про куличики я выдумал, но в остальном так он и сказал).

96. Опишите алгоритм метода Крылова-Боголюбова. Для решения каких задач он применяется?

А применяется он вот для такой стрёмной цепи:



Если мы выкинем триод, разомкнув цепь, то будет



Останется только RLC-цепь, где будут затухающие колебания. Но у нас есть ещё триод. Что это за хрень? Да я сам без понятия, Боголюбов на этом не останавливается. Записав уравнения Кирхгофа и обезразмерив, в итоге придём к уравнению Ван-дер-Поля

$$\ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0$$

Решаем его, естественно, асимптотическими методами, благо что параметр ε мал, да и входит регулярно. Т.е. раскладываем в ряд по параметру,

$$y(t) = \overline{y}(t) + \varepsilon\, y_1(t).$$

Ну-ка, потренируемся. НУ $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$, чем равно $\overline{y}(t)$?

Зануляем параметр ε в ДУ, получаем $\ddot{y} + y = 0$, с учётом НУ это будет $\overline{y}(t) = y_0 \cos t$.

Отлично, нулевое приближение получили. Теперь ищем первое приближение: подставляем $y(t) = y_0 \cos t + \varepsilon\, y_1(t)$ в исходное ДУ. Получим

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + y_1 = -y_0\left(1 - \dfrac{1}{4}y_0^2\right)\sin t + \dfrac{1}{4}y_0^3 \sin 3t, \quad t > 0, \\ y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \end{cases}$$

Решение $y_1(t)$ оказывается неограниченной функцией:

$$y_1(t) = \frac{y_0}{2}\left(1 - \frac{y_0^2}{4}\right) t\cos t - \frac{y_0^3}{32}\sin 3t - \frac{y_0}{2}\left(1 - \frac{11}{16}y_0^2\right)\sin t$$

Упс. Чё делать? Не помогает простой асимптотический метод. Как хорошо, что Крылов-Боголюбов спешат на помощь со своим методом.

97. Почему метод Крылова-Боголюбова называется методом усреднения?

Согласно методу Крылова – Боголюбова, *m*-е приближение к решению *x(t)* системы (9) имеет вид:

$$x = \xi + \varepsilon u_1(\xi,t) + \ldots + \varepsilon^m u_m(\xi,t), \qquad (12)$$

где $\xi=\xi(t)$ - решение усредненного уравнения:

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m A_m(\xi), \qquad (13)$$

где функция $u_i(\xi,t)$ и $A_i(\xi)$ подбираются из того условия, чтобы выражение (12) удовлетворяло уравнению (9) с точностью до членов порядка ε^{m+1} и чтобы $u_i(\xi,t)$ обладали по t той же «возвращаемостью», что и $X(x,t)$. Функции u_i находятся элементарно, а функции A_i определяются в результате усреднения правой части системы (9) после подстановки в нее выражения (12).

Операция усреднения, к слову, производится вот так вот

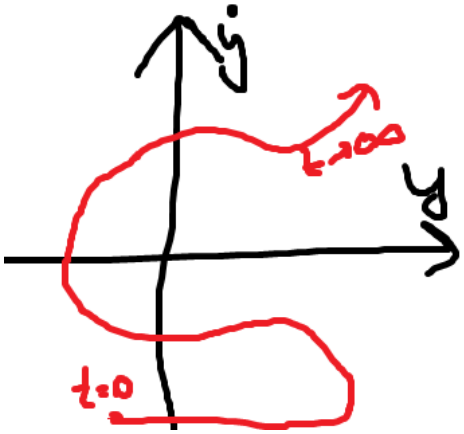
$$\bar{X}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(x,t)dt$$

Вы что-нибудь поняли? Мы переходим к другому уравнению, где что-то усреднено, а потом от него к исходному… или наоборот…да, я тоже не понял. Может быть, я к экзамену это заботаю.

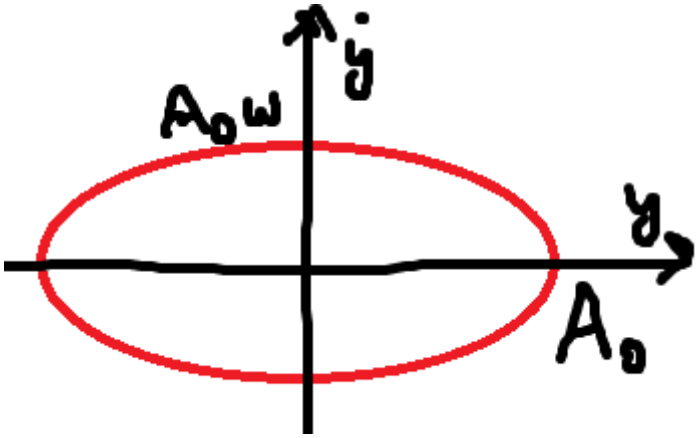
98. Что такое аттрактор? Что такое странный атрактор?

Вообще эта тема не имеет никакого отношения к Крылову-Боголюбову, это всё из курса ДУ, просто в Крылове-Боголюбове эта тема всплыла.

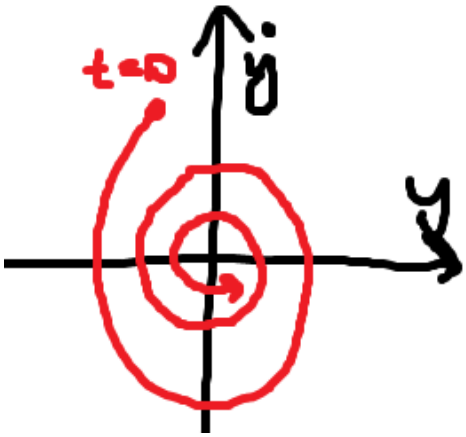
Пусть у нас y(t) – решение любого ДУ (не обязательно Ван-дер-Поля, любого). Мы в каждый момент времени можем как назвать y, так и его производную. А значит, на фазовой плоскости можем построить кривую:



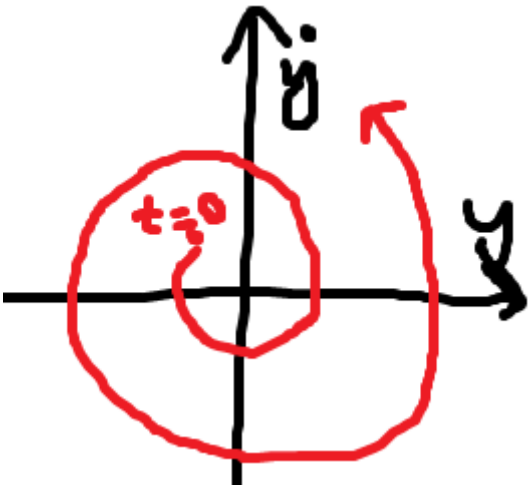
Например, для $y(t)=A_0\sin\omega t$ производная будет $y(t)=A_0\omega\cos\omega t$, и кривая будет в виде эллипса:



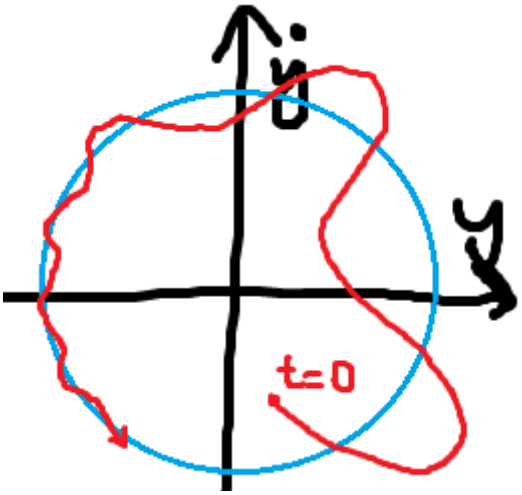
Аттрактор – это то, к чему кривая стремится. Например, здесь она стремится к нулю:



А здесь к бесконечности:



А здесь к окружности:



Окружность – это хорошая кривая, не фрактал. А вот если кривой является фракталом (о чём речь подробнее пойдёт на 14-й лекции), то этот фрактал называется странным.

Заключительная трустори от Боголюбова:
«Когда я был маленьким, в пятом-шестом классе учился, в книжном магазине на улице Горького мне попалась книжка «Странные аттракторы». Я тогда думал, что это опечатка, и имелись в виду «Странные тракторы»… ☺